ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 155

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4.

- ***α)*** Σωστό
- ***β)*** Σωστό
- ***γ)*** Λάθος
- ***δ)*** Λάθος
- ***ε)*** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $D_f = D_g \cap D_h - \{x \in D_{g\cap h} / h(x) = 0\}$.

Λύνω για $x \geq 1$ την

$$h(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \overset{\cdot\sqrt{x}}{\Leftrightarrow} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Επίσης $D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$ με

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η συνάρτηση r ορίζεται στο $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β2. Η f παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, δηλαδή είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Αφού f γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε

$$D_{f^{-1}} = f\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

και

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \left[(x+1)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

καθώς $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$ και $x-1>0$ για $x>1$.

Για $x \in D_f$ και $y \in D_{f^{-1}}$ θέτω

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow$$

$$(y-1)x = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Οπότε

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x>1$$

Αφού $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x>1$ τότε οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Β3. Η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.
Εξετάζω για ασύμπτωτες στο $+\infty$.
Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Άρα, $\lambda = 1$και

$$\lim_{x\to+\infty} (r(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Άρα, $\beta = 0$.
Επομένως η r έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.

Β4. Για $x>1$ η εξίσωση γράφεται

$$\left(f^{-1}f(x)\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \overset{\cdot x\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = \pm 1$$

Όμως $x>1$ άρα η $x=4$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f συνεχής τότε θα είναι συνεχής και στο 2, δηλαδή

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

Όμως

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = e^{\lambda}$$

και

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = -4+8-3+\lambda = \lambda+1$$

και

$$f(2) = \lambda+1$$

Άρα $e^{\lambda} = \lambda+1$ (1) .

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα η (1) έχει μοναδική λύση την $\lambda = 0$.

Γ2. Για $\lambda = 0$ είναι

$$f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Για $x \in (0,2)$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$.

Για $x > 2$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x+4 < 0$ για κάθε $x > 2$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Αφού f συνεχής στο 2 τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Τέλος η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 5$.

Γ3.

i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$.

Εξετάζω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

και

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, οπότε δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο [0,3].

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = -\frac{5}{3}$$

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα Δ και Ε, αρκεί

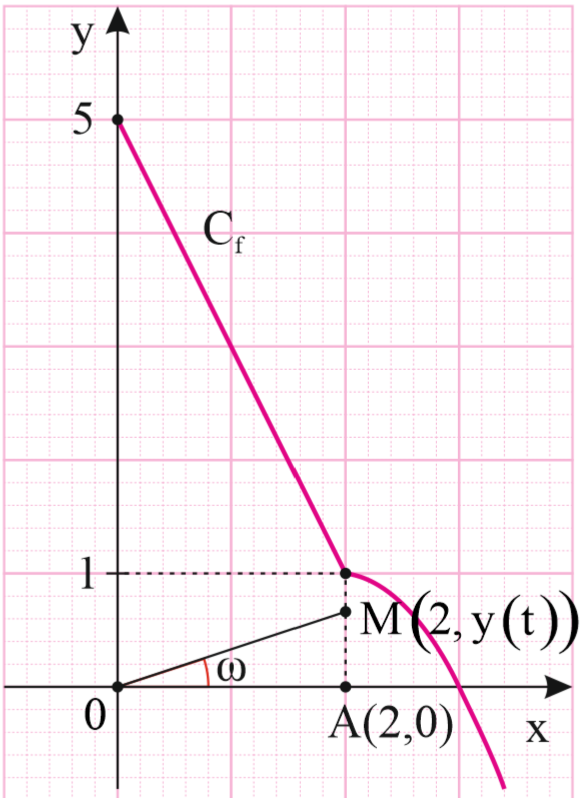
$$f'(\xi) = \lambda \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{5}{3}$$

Αν $\xi \in [0,2)$: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$, άτοπο.

Αν $\xi \in (2,3)$: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$, δεκτή

Άρα, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6} f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα Δ, Ε.

Γ4.



Ισχύει ότι $y'(t) = 0{,}5\ \mu o\nu.\ \mu\eta\kappa o\upsilon\varsigma/sec$. Έστω $M(2, y(t))$ το κινητό σημείο και

$$\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big)=\frac{y(t)}{2}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\big(\omega(t)\big)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^2\big(\omega(t)\big)+\sigma\upsilon\nu^2\big(\omega(t)\big)}{\sigma\upsilon\nu^2\big(\omega(t)\big)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\Big(1+\varepsilon\varphi^2\big(\omega(t)\big)\Big)\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό συναντάει τη C_f δηλαδή το σημείο $\big(2,f(2)\big)$.
Για $t=t_0$ ισχύει ότι

$$\varepsilon\varphi\big(\omega(t_0)\big)=\frac{f(2)}{2}=\frac{1}{2}$$

και

$$\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\omega'(t_0)=\frac{0{,}5}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{4}\cdot\omega'(t_0)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\omega'(t_0)=\frac{1}{5}rad/sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\frac{(\ln x+ax)'\cdot x-(\ln x+ax)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)\cdot x-(\ln x+ax)}{x^2}$$

$$=\frac{1+\cancel{ax}-\ln x-\cancel{ax}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Για κάθε $x>0$ λύνω:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0\ \Leftrightarrow 0<x<e$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x>e$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$O.M.$	$\searrow$

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο e, το

$$f(e)=\frac{1+ae}{e}$$

Από το σύνολο τιμών παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το

$$1+\frac{1}{e}$$

δηλαδή

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow \frac{1+a\cdot e}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow \frac{1}{e}+a=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow a=1$$

Δ2. Στο $\Delta_1=(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),f(e)\right]=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot(lnx+1)\right]=(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$

Στο $\Delta_2=[e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to +\infty}f(x),f(e)\right]=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx+x}{x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1}=1$$

Αφού $0\notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_2.
Αφού $0\in f(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\Delta_1$ η οποία είναι μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

Είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{-2\ln 2+1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1<0$$

και

$$f(1)=1$$

Αφού

$$-2\ln 2+1<0<1\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<f(x_0)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}<x_0<1$$

Δ3.

i) Παρατηρούμε ότι η $x_2 = 4$ είναι προφανής λύση και αφού f γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$ στο Δ_2 η x_2 είναι μοναδική λύση στο Δ_2.

Επίσης
$$f(4) = \frac{ln4 + 4}{4} = \frac{2ln2 + 4}{4} = \frac{ln2 + 2}{2} = f(2)$$
Οπότε το $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f(4)$ και είναι μοναδική στο Δ_1 αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

ii)
$$2^x \leq x^2 \overset{\ln x \nearrow}{\Longleftrightarrow} \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow xln2 \leq 2lnx \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{ln2}{2} \leq \frac{lnx}{x} \Leftrightarrow f(x) \geq f(2)$$

Για $x \in (0, e]$: $f(x) \geq f(2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x \geq 2$
Άρα $x \in (2, e]$.

Για $x \in [e, +\infty)$: $f(x) \geq f(4) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x \leq 4$
Άρα $x \in [e, 4]$.

Οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [2,4]$.

Δ4. Για το ζητούμενο εμβαδό ισχύει
$$E = \int_{-ln2}^{0} |g(x)| dx = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-ln2}^{0} \left| e^x f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^{2x}} \right| dx$$
$$= \int_{-ln2}^{0} e^x \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^{2x}} \right| dx = \int_{-ln2}^{0} e^x \left| f(e^x) \cdot \frac{1 - lne^x}{e^{2x}} \right| dx$$
$$= \int_{-ln2}^{0} e^x |f(e^x) \cdot f'(e^x)| dx$$

Θέτοντας $e^x = u \Leftrightarrow x = lnu$ έχουμε ότι $e^x dx = du$.
Για $x = -ln2 = \ln 2^{-1}$ έχω $u = \frac{1}{2}$.
Για $x = 0$ έχω $u = 1$.

Άρα

$$E = \int_{1/2}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du$$

Από Δ2 ερώτημα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Για

$$\frac{1}{2} \leq x \leq x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Για

$$x_0 \leq x \leq 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Ισχύει επίσης ότι $f'(u) > 0$ για κάθε $u \epsilon \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ από Δ1.

Οπότε

$$E = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du = -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{\left(2\ln\frac{1}{2} + 1\right)^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(-2ln2 + 1)^2}{2} + \frac{1}{2} \; \tau.\mu$$